INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Integrale di:

Funzione Composta*Derivata[argomento]

Metodo di sostituzione

FunzioneComposta*Derivata[argomento]

L'integrale di una **FunzioneComposta*Derivata[argomento]**
è uguale alla **Primitiva della FunzioneEsterna**

$$\int g[f(x)] \bullet f'(x)\,dx = G(f(x)) + c$$

FunzComposta
g=funzEsterna

Derivata[funzInterna]
argomento

PrimitivaFunzEsterna

egole

$$\int [f(x)]^n \bullet f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \cos f(x) \bullet f'(x)\,dx = senf(x) + c$$

$$\int e^{f(x)} \bullet f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int senf(x)\,dx \bullet f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

Integrale di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

1-Funzione Esterna POTENZA

$$\int [f(x)]^n \bullet f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

D[FunzInterna] argomento — Primitiva FunzEsterna

---

1) $\int (7x+1)^3 \cdot 7\,dx =$ ***funzInterna f=7x+1*** *calcolo* ***f'=7*1+0=7*** **C'E'**

$$\int \underset{f}{(7x+1)^3} \cdot \underset{f'}{7}\,dx = \begin{matrix}\text{Primitiva}\\ \text{f.Esterna}\\ \text{Potenza}\end{matrix} = \frac{(7x+1)^4}{4} + c$$

---

2) $\int (2x+4)^5 \cdot 2\,dx =$ ***funzInterna f=2x+4*** *calcolo* ***f'=2*1+0=2***

C'E'

$$\int \underset{f}{(2x+4)^5} \cdot \underset{f'}{2}\,dx = \begin{matrix}\text{Primitiva}\\ \text{f.Esterna}\\ \text{Potenza}\end{matrix} = \frac{(2x+4)^6}{6} + c$$

Integrale di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

1-Funzione Esterna POTENZA

Se la derivata dell'argomento f' non c'è nel testo devo inserirla moltiplicando e dividendo per un numero opportuno.

3) $\int (8x+3)^5\,dx =$ **funzInterna f=8x+3** (argomento) --> **f '= 8*1+0=8** : **NON C'E'**

$$= \frac{1}{8}\int (8x+3)^5 \cdot 8\,dx = \frac{1}{8}\int (8x+3)^5 \cdot \underset{f'}{8}\,dx = \frac{1}{8}\frac{(8x+3)^6}{6} = \frac{(8x+3)^6}{48} + c$$

divido e moltiplico per 8

---

4) $\int (x^2+1)^3 \cdot x\,dx =$ **funzInterna f =x^2+1** (argomento) --> **f '= 2x**

C'è x Manca 2

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\,dx == \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3 \cdot \underset{f'}{2x}\,dx == \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

divido e moltiplico per 2

Integrale di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

2- Funzione esterna

1/f(x)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)} \bullet f'(x)dx = \ln|f(x)| + c$$

DerivataFunzInterna argomento — PrimitivafunzEsterna

1) $\int \frac{8}{8x-1} \cdot dx$

f =8x-1 --> *f '= 8*1+0=8* : **C'E'**

$$= \int \frac{1}{8x-1} \cdot 8\,dx = \ln|8x-1| + c$$

$\frac{1}{8x-1}$: 1/f — $8\,dx$: f' — Primitiva funzEsterna 1/f(x)

---

2) $\int \frac{6x}{3x^2+1} \cdot dx$

f =3x²+1 --> f '= 3*2x+0=**6x** : **C'E'**

$$= \int \frac{1}{3x^2+1} \cdot 6x\,dx = \ln|3x^2+1| + c$$

$\frac{1}{3x^2+1}$: 1/f — $6x\,dx$: f' — Primitiva funzEsterna 1/f(x)

Integrali di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

2- Funzione esterna

1/f(x)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)} \bullet f'(x)dx = \ln|f(x)| + c$$

Negli esempi seguenti la derivata dell'argomento **f'** non è presente nel testo: **devo moltiplicare e dividere** per un numero opportuno

3) $\int \frac{x}{x^2+3}dx =$ ***f interna f=x²+3*** --> ***f'= 2*x+0=2x*** : **C'E' la x manca 2**

Divido e moltiplico per 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3} \bullet dx = \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{x^2+3}}_{1/f} \bullet \underbrace{2x}_{f'} dx = \underset{1/f(x)}{\text{Primitiva funzEsterna}} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+3) + c$$

---

4) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$ ***f.interna =x³+3x*** --> ***f '= 3x²+3 =3(x²+1)*** **manca 3**

Divido e moltiplico per 3

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+1)}{x^3+3x} \bullet dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{1}{x^3+3x}}_{1/f} \bullet \underbrace{(3x^2+3)}_{f'} dx = \underset{1/f(x)}{\text{Primitiva fEsterna}} = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + c$$

Integrali di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

3-Funzione esterna Esponenziale

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

DerivataFunzInterna (argomento) — PrimitivaFunzEsterna

esempi

$$\int 3 \cdot e^{3x}\,dx = \int e^{\overset{f}{3x}} \cdot \overset{f'}{3}\,dx = = e^{3x} + c$$

Negli esempi seguenti la DerivataFunzInterna (in questo caso è l'esponente) **f'** non è nel testo: per ottenerla devo moltiplicare/dividere per un numero opportuno

$$\int e^{-x} \cdot dx =$$ ***f interna=esponente f=-x*** --> ***f '= -1*** : **NON C'E'**

Divido/moltiplico per -1

$$= -\int e^{-x} \cdot (-1) \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot \underset{f'}{(-1) \cdot dx} = -e^{-x} + c$$

$$\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx =$$ ***f interna=esponente f=x²*** --> ***f '= 2x*** : **C'E' la x manca 2**

Divido/moltiplico per 2

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot \underset{f'}{2x \cdot dx} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Integrali di "FunzioneComposta*Derivata[argomento]"

4-Funzione esterna coseno

$$\int \cos f(x) \bullet f'(x)\,dx = senf(x) + c$$

DerivataFunzInterna argomento

PrimitivaFunzEsterna

$$\int 3\cos(3x-4)\,dx = \int \cos(3x-4)\bullet 3\,dx = \text{Calcolo integrale Primitiva della funzEsterna coseno} = sen(3x-4)+c$$

f'=3 c'è

f f'

Negli esempi seguenti la DerivataFunzInterna **f'** non è nel testo: per ottenerla devo moltiplicare e dividere per un numero opportuno

$$\int \cos 4x \cdot dx = \text{Molt/div per 4} = \frac{1}{4}\int \cos 4x \bullet 4\,dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x \bullet 4\,dx = \frac{1}{4} sen4x + c$$

f'=4 non c'è

f'

$$\int \cos(2x+3)\cdot dx = \text{Molt/div per 2} = \frac{1}{2}\int \cos(2x+3)\bullet 2\,dx == \frac{1}{2} sen(2x+3)+c$$

f'=2 non c'è

f'

METODO DI SOSTITUZIONE

funzioni composte

$$\int g[f(x)]dx$$

g=funzioneEsterna
f= funzInterna o argomento

Pongo *argomento=t* cioè f(x)=t
--> ricavo x e calcolo differenziale dx. (*)
Sostituisco nel testo e ottengo un integrale in t che risolvo.
Infine ri-sostituisco f(x) al posto di t.

(*) **DIFFERENZIALE dx** è una operazione che si svolge:
calcolando la derivata prima e moltiplicando per dt

•Esempi: se $x=3t+5$ Differenziale : $dx=(3*1+0)dt$ $dx=3dt$
se $x=t^2-3$ Differenziale : $dx=(2t-0)dt$ $dx=2tdt$
se $x=5t^2+7t$ Differenziale **:** $dx=(10t+7)dt$

1 - Funzioni composte : METODO DI SOSTITUZIONE

$$\int (5x+2)^4 \cdot dx =$$

Funzione esterna Potenza

Pongo f(x)=t $\quad 5x+2=t$

Ricavo x $\quad 5x=t-2 \rightarrow x=\frac{1}{5}t-\frac{2}{5}$

Calcolo Differenziale $\quad dx=\left(\frac{1}{5}\cdot 1+0\right)dt \rightarrow dx=\frac{1}{5}dt$

Sostituisco nel TESTO e svolgo calcoli

$$\int (t)^4 \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5}\int t^4 \, dt =$$

Ottengo un integrale immediato nella variabile t : lo calcolo

$$= \frac{1}{5}\frac{t^5}{5} = \frac{t^5}{25}$$

RI-sostituisco f(x) al posto di t

$$= \frac{(5x+2)^5}{25} + c$$

2 - Funzioni composte : METODO DI SOSTITUZIONE

$$\int \cos(3x-1)\cdot dx =$$

Funzione esterna Coseno

Pongo f(x)=t $\quad 3x-1=t$

Ricavo x $\quad 3x=t+1 \rightarrow x=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$

Calcolo Differenziale $\quad dx=\left(\frac{1}{3}\cdot 1+0\right)dt \rightarrow dx=\frac{1}{3}dt$

Sostituisco nel TESTO e svolgo calcoli

$$\int \cos t \bullet \frac{1}{3}dt \quad = \quad \frac{1}{3}\int \cos t\, dt =$$

Ottengo un integrale immediato nella variabile t : lo calcolo

$$= \frac{1}{3} sent \quad =$$

RI-sostituisco f(x) al posto di t

$$= \frac{1}{3} sen(3x-1)+c$$

3 - Funzioni composte : METODO DI SOSTITUZIONE

$$\int \frac{2}{7x+3}\cdot dx =$$

Funzione esterna 1/f(x)

Pongo f(x)=t $\quad 7x+3=t$

Ricavo x $\quad 7x=t-3 \rightarrow x=\frac{1}{7}t-\frac{3}{7}$

Calcolo Differenziale $\quad dx=\left(\frac{1}{7}\cdot 1+0\right)dt \rightarrow dx=\frac{1}{7}dt$

Sostituisco nel TESTO e svolgo calcoli

$$\int \frac{2}{t}\cdot\frac{1}{7}dt = \frac{2}{7}\int\frac{1}{t}dt =$$

Ottengo un integrale immediato1/t nella variabile t : lo calcolo

$$=\frac{2}{7}\ln|t| =$$

RI-sostituisco f(x) al posto di t

$$=\frac{2}{7}\ln|7x-3|+c$$

4 - Funzioni composte : METODO DI SOSTITUZIONE

$$\int (2x-1)^3 \cdot x \cdot dx =$$

Funzione esterna Potenza

f(x)=t $\quad 2x-1=t$

Ricavo x $\quad 2x=t+1 \rightarrow x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{2}$

Differenziale $\rightarrow dx=\left(\frac{1}{2}\cdot 1+0\right)dt \rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

Sostituisco nel TESTO e svolgo calcoli

$$\int (t)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dt = \int \left(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\cdot\frac{1}{2}dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{4}t^3\right)dt =$$

integrale immediato in t: lo calcolo

$$= \frac{1}{4}\bullet\frac{t^5}{5}+\frac{1}{4}\frac{t^4}{4}=\frac{t^5}{20}+\frac{t^4}{16}=$$

RI-sostituisco f(x) al posto di t

$$= \frac{(2x-1)^5}{20}+\frac{(2x-1)^4}{16}+c$$

5 - Funzioni composte : METODO DI SOSTITUZIONE

$$\int \sqrt{(9x+7)} \cdot dx =$$

Funzione esterna Radice Quadrata

Conviene porre =t tutta la radice!

f(x)=t $\quad \sqrt{9x+7} = t \rightarrow \quad 9x+7 = t^2$

Ricavo x $\quad x = \frac{t^2}{9} - \frac{7}{9} \quad x = \frac{1}{9}t^2 - \frac{7}{9}$

Differenziale $\quad dx = \left(\frac{1}{9} \cdot 2t - 0\right) \cdot dt \qquad dx = \frac{2}{9} t \cdot dt$

Sostituisco nel TESTO e svolgo calcoli

$$\int t \cdot \frac{2}{9} t \, dt = \frac{2}{9} \int t^2 \, dt =$$

Ottengo un integrale immediato nella variabile t : lo calcolo

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{2t^3}{27} =$$

RI-sostituisco f(x) al posto di t

$$= \frac{2(\sqrt{9x+7})^3}{27} = \frac{2\sqrt{(9x+7)^3}}{27} + c$$

Regola di integrazione
PER PARTI

Si applica per calcolare l'integrale
del prodotto fra due funzioni

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

Si applica per integrare il prodotto fra due funzioni del tipo:

$$\int x^n e^x\,dx \qquad \int x^n \cdot \cos x \cdot dx \qquad \int x^n \ln x \cdot dx =$$

- Una funzione si chiama FattorFinito **f(x)** → si deve derivare *trovando f'(x)*
- L'altra è FattorDifferenziale g'(x)dx →si deve integrare: *trovo primitiva g(x)*

ff **fd**

$$\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\bullet g(x)dx$$

ff . INT(fd) $-\int$ D[ff] . INT(fd)

*NB: scelgo come **FattorFinito** la funzione più comoda da derivare*

FattorFinito
x

$$\int \overset{\textbf{ff}}{x}\cdot \overset{\textbf{fd}}{e^x}\cdot dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x \bullet dx = xe^x - e^x + c$$

ff . INT(fd) $-\int$ D[ff] . INT(fd)

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

ff fd

ff . INT(fd) $-\int$ D[ff] . INT(fd)

esempi

$$\int x\cdot\cos x\cdot dx = x\cdot senx - \int 1\cdot senx\cdot dx = x\cdot senx - (-\cos x) = x\cdot senx + \cos x + c$$

ff fd

Quando c'è il logaritmo scelgo lnx come fattor finito

$$\int \ln x\cdot dx = \int \ln x\cdot 1\cdot dx = \ln x\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\cdot dx = x\ln x - \int 1\cdot dx = x\ln x - x + c$$

ff fd

$$\int x\ln x\cdot dx = \int \ln x\cdot x\cdot dx = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

fd ff