Calcolo combinatorio

fattoriale di un numero n

Si chiama fattoriale di un numero naturale n e si indica con $\boldsymbol{n!}$ (si legge n fattoriale) il prodotto:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$\boldsymbol{n!}$ è anche uguale a $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1)!}$ oppure a $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}$

esempi	$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$	$6! = 6 \cdot 5!$	$0! = 1$ per convenzione	$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$

coefficiente binomiale

Il simbolo $\binom{n}{k}$ si chiama coefficiente binomiale di n su k.
Il suo valore è dato da:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \qquad n > k$$

esempio: $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 6}{3} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = \mathbf{126}$

proprietà

$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{1}{1} = \binom{0}{0} = 1$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

calcolo combinatorio

n = numero di oggetti *k = numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	$P_n = n!$	$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\,r_2! \ldots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad n > k$	$D_{n,k}^r = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad n > k$	$C_{n,k}^r = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

esempi

n = numero di oggetti *k = numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola LIBRO? $n = 5$ $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola MAMMA? $n = 5$ $r_1 = 3$ $r_2 = 2$ $P_5^r = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	in quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate? $n = 5$ $k = 3$ $D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$	utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare? $n = 3$ $k = 4$ $D_{3,4}^r = 3^4 = 81$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	un negoziante vuole esporre 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si possono esporre le scarpe? $n = 10$ $k = 4$ $C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$	si vogliono distribuire 7 matite identiche a 4 bambini, in quanti modi diversi si possono distribuire? fai attenzione $n = 4$ e $k = 7$ $C_{4,7}^r = \frac{(4+7-1)!}{7! \cdot (4-1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$