EQUAZIONI LOGARITMICHE

RICORDO la definizione di logaritmo

Si chiama $\log_a b$ l'esponente x tale che a elevato a x dia per risultato b . (a>0 e a $\neq$1)

$$\log_a b = x \qquad esponente\ \ tale\ \ che: \qquad a^x = b$$

importante: condizione di esistenza : **b>0** ***argomento maggiore di zero***

CASO A: equazione logaritmica elementare : LOGARITMO=NUMERO:

applico la definizione di logaritmo, scrivendo che l'argomento è uguale alla base elevata al numero.

$$\log_a f(x) = n \rightarrow f(x) = a^n \qquad CE: \ \ f(x) > 0$$

DEVO calcolare la condizione di esistenza CE: f(x)>0 e confrontare con CE la soluzione:
SE essa è compresa nel CE è accettabile, altrimenti NO.

Esempi

1) $\log_2(x+4) = 3$ Si ha: $x+4 = 2^3 \rightarrow x+4 = 8 \rightarrow x = 4$
cond esistenza x+4>0 da cui x>-4 per cui la soluzione x=4 è accettabile

2) $\log(6x-1) = 1$ Si ha: $6x-1 = 10^2 \rightarrow 6x-4 = 100 \rightarrow 6x = 104 \rightarrow x = \frac{52}{3}$
COND: 6x-1>0 x>1/6 per cui la soluzione x=52/3 è accettabile

3) $\log_3(5x+9) = -2$ Si ha: $5x+9 = 3^2 \rightarrow 5x+9 = 9 \rightarrow 5x = 0 \rightarrow x = 0$
COND: 5x+9>0 x>-9/5 per cui la soluzione x=0 è NON accettabile

4) $\log_5(x+1) = -1$ Si ha: $x+3 = 5^{-1} \rightarrow x+3 = \frac{1}{5}$ $(den\ \ comune)$ $5x+15 = 1 \rightarrow 5x = -14 \rightarrow x = -\frac{14}{5}$
COND: x+1>0 x>-1 per cui la soluzione x=-14/5 è NON accettabile

CASO B: ho l'UGUAGLIANZA FRA DUE LOGARITMI con stessa base→ uguaglio gli argomenti

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f(x) = g(x) \qquad CE \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Esempi

5) $\log_2(x-3) = \log_2(6-x)$ $\qquad x-3 = 6-x \qquad 2x = 9 \qquad x = \frac{9}{2}$

cond $\begin{cases} x-3>0 \\ 6-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>3 \\ -x>-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x>3 \\ x<6 \end{cases}$ $3<x<6$ per cui x=9/2 è ACCETTABILE

6) $\log_5(7x+4) = \log_5(x-1)$ $\qquad 7x+4 = x-1 \rightarrow 7x+4-x+1 = 0 \qquad 6x+5 = 0 \rightarrow 6x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{6}$

cond $\begin{cases} 7x+4>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4/7 \\ x>1 \end{cases}$ $x>1$ per cui x=-5/6 è NON ACCETTABILE

7) $\log_2(x^2+5x) = \log_2(8x)$ $\qquad x^2+5x = 8x \qquad x^2+5x-8x = 0 \qquad x^2-3x = 0 \qquad x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 3$

cond $\begin{cases} x^2+5x>0 \\ 8x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-5 \vee x>0 \\ x>0 \end{cases}$ $x>0$ per cui x=3 è ACCETTABILE (x=0 non acc)

EQ. LOGARITMICHE risolubili applicando le proprieta'

$\log A + \log B = \log(A \bullet B)$ *la somma di logaritmi è il logaritmo del PRODOTTO degli argomenti*

Esempio 1:

$\log_5(x+4) + \log_5(x-1) = \log_4(8x-4) \qquad \log[(x+4)(x-1)] = \log[8x-4] \qquad$ *forma normale*

$[(x+4)(x-1)] = [8x-4] \qquad x^2+3x-4 = 8x-4 \qquad x^2-5x=0 \qquad x=0 \vee x=5$

il Campo di esistenza è un sistema fra le condizioni di esistenza dei vari logaritmi: argomento> zero

$$CE\begin{cases} x+4>0 \\ x-1>0 \\ 8x+4>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>1 \\ x>-1/2 \end{cases} \quad (....fai\ \ tu\ \ il\ \ grafico!) \rightarrow x>1$$

pertanto solo **x=5 è accettabile**

$\log A - \log B = \log\left(\dfrac{A}{B}\right)$ *la diff di logaritmi è il logaritmo del QUOZIENTE degli argomenti*

Esempio 2

$\log(x^2+4) - \log(2x-3) = \log(x) \qquad \log\left[\dfrac{x^2+4}{2x-3}\right] = \log[x] \qquad$ *forma normale*

$\dfrac{x^2+4}{2x-3} = x \qquad x^2+4 = x\cdot(2x-3) \qquad x^2+4 = 2x^2-3x \qquad -x^2+3x+4=0$

$x^2-3x-4=0 \qquad \dfrac{+3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{+3\pm 5}{2} \rightarrow x=-1 \vee x=4$

il Campo di esistenza è un sistema fra tutti gli argomenti del testo con la condizione > zero

$$CE\begin{cases} x^2+4>0 \\ 2x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R \\ x>3/2 \rightarrow (....fai\ \ tu\ \ il\ \ grafico!) \rightarrow x>3/2 \\ x>0 \end{cases}$$

pertanto solo **x=4 è accettabile**

$n\log A = \log(A)^n$ *un fattore esterno **n** si porta all'interno come ESPONENTE dell'argomento*

Esempio 3

$\log(x+7) + \log(x) = 2\log(x-3) \qquad \log[(x+7)x] = \log(x-3)^2 \qquad$ *forma normale*

$x^2+7x = x^2-6x+9 \qquad 13x-9=0 \qquad x=9/13$

$$CE\begin{cases} x+7>0 \\ x>0 \\ x-3>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-7 \\ x>0 \\ x>3 \end{cases} \rightarrow (....fai\ \ tu\ \ il\ \ grafico!) \rightarrow x>3$$

la s soluzione x=9/13 **non è accettabile** e l'eq è **impossibile**

Altre due formule utili negli esercizi: Come trasformare UN NUMERO in LOGARITMO $N = \log_a a^N$

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE : $\log_a b = \dfrac{\log_N b}{\log_N a}$

Esempio 4 . nell'equazione compare un numero isolato : devo trasformarlo in logartitmo

$\log_2(x^2+8x) = 3 + \log_2(1+x) \qquad \log_2(x^2+8x) = \log_2 2^3 + \log_2(1+x) \qquad \log_2(x^2+8x) = \log_2[8(1+x)]$

$x^2+8x = 8+8x \qquad x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \qquad x \simeq \pm 2,83\ \ (calcola\ \ tu\ \ CE!)\ \ accetto\ \ solo\ \ x \simeq +2,83$

Esempio 5. i logaritmi hanno basi diverse: cambio base opportunamente a uno di loro (oppure ad entrambi)

$\log_3(x) = \log_9(x^2-x+2) \qquad cambio\ \ base \rightarrow \log_3(x) = \dfrac{\log_3(x^2+x+2)}{\log_3 9} \qquad \log_3(x) = \dfrac{\log_3(x^2-x+2)}{2} \qquad 2\log_3(x) = \log_3(x^2-x+2)$

$\log_3(x)^2 = \log_3(x^2-x+2) \quad \rightarrow x^2 = x^2-x+2 \rightarrow x=+2\ \ accettabile \qquad (calcola\ \ tu\ \ il\ \ CE\ \ !\ )$